பள்ளிக் கல்வித்துறை

சேலம் மாவட்டம்

மேல்நிலைஇரண்டாம் ஆண்டு

கணிதவியல்

வினாவிடை வங்கி

2012-2013

வெளியீடு:

முதன்மைக் கல்விஅலுவலர், சேலம்

திரு.இரா. ஈஸ்வரன்,M.A.,M.Ed.,
முதன்மைக் கல்விஅலுவலர், சேலம்.

தெய்வத்தான் ஆகாதெனினும் முயற்சி தன்
மெய்வருத்தக் கூலிதரும். திருக்குறள்.

அன்பிற்குரிய தலைமை ஆசிரியர்கள், முதுகலை கணித ஆசிரியர்கள் மற்றும் கணிதம் கற்கும் மேல்நிலைக் கல்வி மாணவ, மாணவியர்கள் அனைவருக்கும் வணக்கம்.!

பனிரெண்டாம் வகுப்பு அரசுப் பொதுத் தேர்வில் சேலம் மாவட்ட மாணவ, மாணவியர்கள் அனைவரும் நல்ல மதிப்பெண்கள் பெற்று தேர்ச்சிபெற வேண்டும் என்ற உயரிய எண்ணத்தோடு இக்கட்டகம், அனைத்து மேல்நிலைப் பள்ளிகளில் கணித பாடம் கற்பிக்கும் ஆசிரியர்கள் மற்றும் கணித பாடம் படித்துக் கொண்டிருக்கும் மாணவர்கள் பயன் பெறத்தக்க வகையில் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது.

தொழிற்கல்வி பிரிவில் பயிலும் மாணவர்கள் குறிப்பாக ஒவ்வொரு ஆண்டும் கணித பாடத்தில் தோல்வி அடைவதனால் பொறியியற் பட்டப்படிப்பில் சேரும் வாய்ப்பை வாழ்க்கையில் இழக்க நேரிடுகிறது. ஆதலால் இவ்வாண்டு அனைத்து மாணவர்களும் தேர்ச்சி பெறும் வகையில் மிக முக்கியமான வினாக்கள் தேர்வு செய்து இக்கட்டகத்தில் தொகுத்து வழங்கப்பட்டு உள்ளது. இக்கட்டகத்திலுள்ள வினா விடைகளைப் படித்து பயிற்சி பெற்றால் பொதுத் தேர்வில் உயர்ந்த மதிப்பெண்கள் பெறலாம்.

கணித பாடத்தில் உள்ள பயத்தைப் போக்கவும், அதை எளிமையாக்கும் பொருட்டும், பாடத்தை எளிதில் புரிந்து கொள்ளும் அடிப்படையில் தயாரிக்கப்பட்டதே இந்த வினா – விடை வங்கியாகும்.

இக்கட்டகத்தின் மூலம் பொதுத்தேர்வில் கேட்கப்பட்ட கணக்குகளையும், முக்கியமான கணக்குகளையும் ஒரே தொகுப்பாக மாணவர்கள் பெறமுடிகிறது. இதனை மாணவர்கள் கூர்ந்து படித்து, பொதுத்தேர்வை நம்பிக்கையுடன் எதிர் கொள்ளமுடியும் என நம்புகிறேன்.

மாணவச் செல்வங்களே! இந்த ஆண்டு பனிரெண்டாம் வகுப்பு அரசுப்பொதுத் தேர்வு எழுதும் அனைவரும் வெற்றி பெற்று உங்களது பெருமைமிகு பள்ளிக்கும், சிறப்புமிகு தலைமை ஆசிரியருக்கும், முன்னேற்றத்திற்கு உறுதுணையாய் இருக்கும் ஆசிரியர்களுக்கும், உங்களது எதிர்காலம் பற்றி கனவுகாணும் பெற்றோர்களுக்கும், கல்வியில் சிறப்பிடம் பெற நமது சேலம் மாவட்டத்திற்கு பெருமை தேடித்தருமாறு உங்களைஅன்போடு கேட்டுக்கொள்கிறேன்.

இக்கட்டகத்தை மாணவர்களுக்கு சென்றடைய உதவிய வைஸ்யாகல்லூரி மற்றும் ஜெயராம் கல்லூரி நிருவாகத்தினருக்கும், நல்லமுறையில் அச்சிட்டுத் தந்த சேலம், காதம்பரி அச்சகத்தாருக்கும் எனது நன்றியினை தெரிவித்துக் கொள்கிறேன்.

இறுதியாக, இக்கட்டகத்தைத் தொகுத்த ஆசிரியர்கள் அனைவருக்கும் எனது மனமார்ந்த நன்றியினையும், பாராட்டுதலையும் தெரிவித்துக்கொள்கிறேன்.

மிக்கஅன்புடன்

(இரா.ஈஸ்வரன்)

முதன்மைக் கல்விஅலுவலர், சேலம்.

12–ஆம் வகுப்புகணிதபாடத்தில்எளியமுறையில்தேர்ச்சி பெறமுக்கியவழிகள்

1. $+2$ கணிதப் பாட வினா கட்டமைப்பின் படி ஒரு மதிப்பெண் வினாக்களைப் பொறுத்தவரை பாடபுத்தகத்திற்குப் பின் உள்ள வினாக்களில் எவ்வித மாற்றமும் இன்றி கேட்கப்படுவதால், அவ்வினாக்களை மாணாக்கர்களுக்கு மீளமீளப் பயிற்சி அளித்தால் 30 மதிப்பெண்களை மாணாக்கர்கள் எளிதில் பெற்றுவிடுவார்கள்.

2. $+2$ கணிதப் பாட வினா கட்டமைப்பின்படி பாட புத்தகத்திலுள்ள எடுத்துக்காட்டு கணக்கிலிருந்து 102 மதிப்பெண்களுக்கு வினாக்கள் கேட்கப்படும்.
3. முதல் மூன்று பாடங்களிலிருந்து (அணிகள்மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள், வெக்டர் இயற்கணிதம், கலப்பெண்கள்) 90 மதிப்பெண்களுக்கு வினாக்கள் கேட்கப்படும்.
4. வளைவரை வரைதலில் உள்ள மூன்று கணக்குகளை$[\,y^2 = 2x^3, y = x^3, y = x^3 + 1]$ அடிக்கடி பயிற்சி பெற்றால் 10 மதிப்பெண்கள் பெறுவதற்கு வாய்ப்பு உண்டு.
5. மெய் அட்டவணை மற்றும் குலங்களின் பண்புகள் (பாடம் 9) இவற்றில் நன்கு பயிற்சி பெற்றால் 12 மதிப்பெண்களை எளிதாகப் பெறலாம்.
6. பாடம் 2 இல், கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிமற்றும் மூன்று தளங்களின் சமன்பாடுகளை காணுதல்
   $(\vec{r} = \vec{a} + t\vec{u} + s\vec{v}, \vec{r} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} + s\vec{u}, \vec{r} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c})$
   இவற்றில் நன்கு பயிற்சி பெற்றால் 10 மதிப்பெண்கள் பெறுவது எளிது.
7. தேவையான இடங்களில் படங்களை வரைந்தால் அதற்குண்டான மதிப்பெண்களைப் பெறலாம்.
8. கணக்குகளுக்கான சூத்திரங்களை ஆங்காங்கு தவறாமல் குறிப்பிட்டால் தக்க மதிப்பெண்கள் கிடைக்க வாய்ப்பு உண்டு.
9. ✪ குறியிட்ட வினா – விடையினை மட்டும் படித்தால் உறுதியாக தேர்ச்சி பெறலாம்.
10. மற்ற வினா – விடைகளையும் படித்தால் அதிக மதிப்பெண்கள் பெறலாம்.

வினாவிடை வங்கி தொகுப்பாசிரியர்கள்

திரு.T.அர்த்தனாரி, தலைமைஆசிரியர், அரசுமேல்நிலைப் பள்ளி, நடுப்பட்டி.	**திரு.M.G.சம்பத்குமார்,** ஸ்ரீராமகிருஷ்ணாசாரதாமேல்நிலைப் பள்ளிசேலம்.
முனைவர் P.S.ராஜா, சிறுமலர் மேல்நிலைப் பள்ளி, சேலம்.	**திரு. N.கேசவன்,** அரசுமகளிர் மேல்நிலைப் பள்ளி, பெத்தநாய்க்கன் பாளையம்.
முனைவர் I.M. ஆரோக்கியசாமி, புனிதபால்மேல்நிலைப் பள்ளி, சேலம்.	**திரு. A.முரளி,** அரசுமேல்நிலைப் பள்ளி, கஞ்சநாய்க்கன்பட்டி.
திரு. S.மாரியப்பன், நகரவைமகளிர்மேல்நிலைப் பள்ளி, அம்மாபேட்டை, சேலம்.	**செல்விS.சரஸ்வதி** அரசுஆண்கள்மேல்நிலைப் பள்ளி, இளம்பிள்ளை.
திருமதி. R.ஜெயந்தி அரசுமேல்நிலைப் பள்ளி, சர்க்கார் கொல்லப்பட்டி.	**திருமதி. L.கஸ்தூரி** அரசுமகளிர் மேல்நிலைப் பள்ளி, வலசையூர்.
திரு. P.சுந்தரவடிவேலு அரசுமகளிர் மேல்நிலைப் பள்ளி, இளம்பிள்ளை.	**திருமதி. T.லதா** அரசுமகளிர் மேல்நிலைப் பள்ளி, மகுடஞ்சாவடி.

பொருளடக்கம்

வ எண்	பாடத்தலைப்பு	வினாக்களின் எண்ணிக்கை			எதிர்பார்க்கப் படும் வினாக்களின் எண்ணிக்கை			பக்க எண்
		ஒரு மதிப்பெண் வினாக்கள்	ஆறு மதிப்பெண்கள் வினாக்கள்	பத்து மதிப்பெண் ள் வினாக்கள்	1Mark	6Marks	10Marks	
1	அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்	✪19	✪15	10	3	2	1	1
2	வெக்டர் இயற்கணிதம்	✪35		✪22	4	0	2	11
3	கலப்பெண்கள்	✪29	✪15		3	1	0	20
4	பகுமுறை வடிவக்கணிதம்	✪38		✪17	3	0	3	24
5	வகைநுண்கணிதம்:பயன்பாடுகள்–I	✪44			3	0	0	36
6	வகைநுண்கணிதம்:பயன்பாடுகள்–II	✪15	8	✪11	2	1	1	38
7	தொகைநுண்கணிதம்:பயன் பாடுகள்	✪19	3	✪6	3	0	1	43
8	வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்	✪26		✪15	3	0	1	47
9	தனிநிலை கணக்கியல்	✪20	✪39	10	3	2	1	52
10	நிகழ்தகவுப்பரவல்	✪26	6	7	3	1	1	62
11	பொதுத்தேர்வு : ஆறு மதிப்பெண்கள் கணக்குகளின் பட்டியல் மார்ச்: 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011 மற்றும் 2012							69
12	பொதுத்தேர்வு : ஆறு மதிப்பெண்கள் கணக்குகளின் பட்டியல் ஜீன் 2006, 2007,2008,2009,2010,2011 மற்றும் 2012							70
13	பொதுத்தேர்வு : ஆறு மதிப்பெண்கள் கணக்குகளின் பட்டியல் அக்டோபர்: 2006, 2007,2008,2009,2010,2011 மற்றும் 2012							71
14	பொதுத்தேர்வு : பத்துமதிப்பெண்கள் கணக்குகளின் பட்டியல் மார்ச்: 2006, 2007,2008,2009,2010,2011 மற்றும் 2012							72
15	பொதுத்தேர்வு : பத்துமதிப்பெண்கள் கணக்குகளின் பட்டியல் ஜீன் 2006, 2007,2008,2009,2010,2011 மற்றும் 2012							73
16	பொதுத்தேர்வு : பத்துமதிப்பெண்கள் கணக்குகளின் பட்டியல் அக்டோபர்: 2006, 2007,2008,2009,2010,2011 மற்றும் 2012							74

DESIGN AND BLUEPRINT

Weightage of Marks towards Objectives:

Objectives	***K***	***U***	***A***	***S***	***Total***
Marks	76	72	106	42	296
Percentage	26	24	36	14	100

Weightage towards Form of Questions (to be answered):

Form of Questions	*(Objective) Section A*	*(Short) Section B*	*(Long) Section C*	*Total*
Number of Questions	40	10	10	
Marks Allotted	40	60	100	200
Time (Minutes)	50	45	85	180

Level of Difficulty:

Level	**Percentage of Marks**
(Difficult) High	10
(Average) Medium	30
(Easy) Low	60

Scheme of sections and Options:

Sections	**No of questions**	**No. of Questions to be answered**
A	*40	40
B	16 Last question is in "either-or" form	10
C	16 Last question is in "either-or" form	10

Distribution of questions and marks towards Examples, exercises and outside the Text Book:

	Section A	**Section B**	**Section C**	**Total Marks**	**%**
From Examples given in the text book (Including theorems and results)	*30 (Text Book Collection)	**7**	**6**	**132**	**44.6**
From Exercises given in the text book	* 10 Created (COME BOOK)	**8**	**9**	**148**	**50**
From Outside the Text Book(Based on the Syllabus)		**1**	**1**	**16**	**5.4**
Total marks Section Wise	**40**	**96**	**160**	**296**	**100**

Weightage to Content : XII Mathematics

SL.NO	**Chapters**	**No of 1 mark**	**No of 6 marks**	**No of 10 Marks**	**Total**
1	Application of Matrices and Determinants	4	2	1	26
2	Vector Algebra	6	2	2	38
3	Complex Numbers	4	2	1	26
4	Analytical Geometry	4	1	3	40
5	Differential Calculus : Applications I	4	2	2	36
6	Differential Calculus :Applications II	2	1	1	18
7	Integral calculus	4	1	2	30
8	Differential equations	4	1	2	30
9	Discrete Mathematics	4	2	1	26
10	Probability Distribution	4	2	1	26
Total		**40**	**16**	**16**	**296**

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

பிரிவு – அ வினா விடைகள்

வினா எண்	வினா	விடை
1	A என்ற அணியின் வரிசை 3 எனில் $\det(KA)$ என்பது	$k^3 \det(A)$
2	$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் 2 எனில், λ வின் மதிப்பு	1
3	அலகு அணி I இன் வரிசை $n, k \neq 0$ ஒரு மாறிலி எனில் $adj(kI) =$	$k^{n-1}(adj\, I)$
4	$A = [2 \quad 0 \quad 1]$ எனில், AA^T இன் தரம்	1
5	$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & k & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு நேர்மாறு உண்டு எனில் k-இன் மதிப்புகள்	$k \neq 4$
6	A, B என்ற ஏதேனும் இரு அணிகளுக்கு $AB = 0$ என்று இருந்து மேலும் A ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணி எனில்	$B = 0$
7	$ax + y + z = 0$; $x + by + z = 0$; $x + y + cz = 0$ ஆகிய சமன்பாடு களின் தொகுப்பானது ஒரு வெளிப்படையற்ற தீர்வை பெற்றிருப்பின் $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} =$	1
8	$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ எனில் AA^T இன் தரம்	1
9	$\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -4 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$ என்ற மூலை விட்ட அணியின் தரம்	3
10	$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ எனில், A^{12} என்பது	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5^{12} \end{bmatrix}$
11	ஒரு திசையிலி அணியின் வரிசை 3, திசையிலி $k \neq 0$ எனில், A^{-1} என்பது	$\frac{1}{k} I$
12	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ என்பதன் நேர்மாறு	$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$
13	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
14	மதிப்பிட வேண்டிய மூன்று மாறிகளில் அமைந்த மூன்று நேரிய அசமபடித்தான சமன்பாட்டுத் தொகுப்பில் $\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = 0$ $\Delta_y \neq 0$, $\Delta_z = 0$ எனில், தொகுப்புக்கானத் தீர்வு	தீர்வு இல்லாமை
15	$a e^x + be^y = c$; $pe^x + qe^y = d$ மற்றும் $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c & b \\ d & q \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & c \\ p & d \end{vmatrix}$ எனில் (x, y) இன் மதிப்பு	$\left(\log\frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \log\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)$
16	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம்	1
17	$-2x + y + z = l$; $x - 2y + z = m$; $x + y - 2z = n$ என்ற சமன்பாடுகள் $l + m + n = 0$ எனுமாறு அமையுமாயின் அத்தொகுப்பின் தீர்வு	எண்ணிக்கைக்கையற்ற தீர்வு
18	$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு $(adj\, A)A =$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
19	ஒரு சதுர அணி A இன் வரிசை n எனில் $\|adj\, A\|$ என்பது	$\|A\|^{n-1}$

பிரிவு – ஆ வினா விடைகள்

✪1. $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -5\end{bmatrix}$ எனில் $A(adj\ A) = (adj\ A)A = |A|I_2$ என்பதனைச் சரிபார்.

தீர்வு:

$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -5\end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -5-6 = -11$

$adj\ A = \begin{bmatrix}-5 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}$

$$A(adj\ A) = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-5-6 & -2+2\\-15+15 & -6-5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-11 & 0\\0 & -11\end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$(adj\ A)A = \begin{bmatrix}-5 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-5-6 & -10+10\\-3+3 & -6-5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-11 & 0\\0 & -11\end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$|A|I_2 = -11\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-11 & 0\\0 & -11\end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots (3)$$

(1),(2) மற்றும் (3)-இலிருந்து

$$\boxed{A(adj\ A) = (adj\ A)A = |A|I_2}$$

செய்து பார்க்க:

$\begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & -4\end{bmatrix}$ எனில் $A(adj\ A) = (adj\ A)A = |A|I_2$ என்பதனைச் சரிபார்.

✪2. $A = \begin{bmatrix}5 & 2\\7 & 3\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$ எனில் $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ என்பதனைச் சரிபார்.

தீர்வு:

$$|A| = \begin{vmatrix}5 & 2\\7 & 3\end{vmatrix} = 15-14 = 1$$

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix}3 & -2\\-7 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}3 & -2\\-7 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -2\\-7 & 5\end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix} = 2-1 = 1$$

$$\text{adj}B = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{adj}B = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\-7 & 5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3-7 & -2+5\\3-14 & -2+10\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-4 & 3\\-11 & 8\end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$AB = \begin{bmatrix}5 & 2\\7 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}10-2 & -5+2\\14-3 & -7+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8 & -3\\11 & -4\end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix}8 & -3\\11 & -4\end{vmatrix} = -32+33 = 1 \neq 0$$

$$\text{adj}(AB) = \begin{bmatrix}-4 & 3\\-11 & 8\end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\text{adj}(AB) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}-4 & 3\\-11 & 8\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-4 & 3\\-11 & 8\end{bmatrix} \cdots\cdots (2)$$

(1) மற்றும் (2)-இலிருந்து $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

செய்து பார்க்க:

$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$ எனில் $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ என்பதனைச் சரிபார்.

✪3. **நேர்மாறு அணிகாணல் முறையில் தீர்க்க:**

$$2x - y = 7, 3x - 2y = 11$$

தீர்வு:

தரப்பட்ட சமன்பாடுகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\11\end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{vmatrix} = -4+3 = -1 \neq 0$$

A பூச்சியமற்ற கோவை அணி. எனவே A^{-1} காண முடியும்.

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix}-2 & 1\\-3 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-2 & 1\\-3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$ என்பது தீர்வாகும்.

$$X = \begin{bmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14-11\\21-22\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\therefore x = 3, y = -1}$$

செய்து பார்க்க:

நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் தீர்க்க:

(i) $7x + 3y = -1, 2x + y = 0$

(ii) $x + y = 3, 2x + 3y = 8$

✪4. $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ ***இன் நேர்மாறு காண்.***

தீர்வு:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *என்க*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-1) - 0 + 3(-2-1)$$
$$= 0 - 0 - 9 = -9 \neq 0$$

எனவே A^{-1} *காண முடியும்.*

$$A_c = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} +(1-1) & -(2+1) & +(-2-1) \\ -(0+3) & +(1-3) & -(-1-0) \\ +(0-3) & -(-1-6) & +(1-0) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & 1 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\text{adj}A = A_C^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & 7 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & 7 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

✪5. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}}$ ***–க்கு,*** $\boldsymbol{A = A^{-1}}$ ***எனக் காட்டுக.***

தீர்வு:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= -1(-15+16) - 2(20-16) - 2(-16+12)$$
$$= -1(1) - 2(4) - 2(-4) = -1 - 8 + 8 = -1$$
$$A_c = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} +(-15+16) & -(20-16) & +(-16+12) \\ -(10-8) & +(-5+8) & -(4-8) \\ +(8-6) & -(-4+8) & +(3-8) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$
$$\text{adj}A = A_C^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -4 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -4 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} = A$$

✪6. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}}$ ***இன் சேர்ப்பு அணி A என நிறுவுக.***

தீர்வு:

$$A_c = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} +(0-4) & -(3-4) & +(4-0) \\ -(-9+12) & +(-12+12) & -(-16+12) \\ +(-3+0) & -(-4+3) & +(0+3) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\text{adj}A = A_C^T = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = A$$

செய்து பார்க்க:

பின்வரும் அணிகளின் நேர்மாறுகளைக் காண்க

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

✪7. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix}$ ***என்ற அணியின் தரம் காண்க.***

தீர்வு:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix}$ *என்க.*

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -5\\ 3 & 1 & -5 & -1\\ 1 & 5 & -7 & 2\end{bmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_1$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -5\\ 0 & 7 & -8 & 14\\ 0 & 7 & -8 & 7\end{bmatrix} \quad \begin{matrix}R_2 \to R_2 - 3R_1\\ R_3 \to R_3 - R_1\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -5\\ 0 & 7 & -8 & 14\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 - R_2$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3 என்பதால், $\rho(A) = 3$

✪8. $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ -2 & 4 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 7 & 6\end{bmatrix}$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு:

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ -2 & 4 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 7 & 6\end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 10 & 10\end{bmatrix} \quad \begin{matrix}R_2 \to R_2 + 2R_1\\ R_3 \to R_3 + R_1\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 - 2R_2$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளதால்,$\rho(A) = 2$.

✪9. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4 & 12 & 12 & 4\\ 0 & 4 & 8 & 4\\ 4 & -4 & 8 & 0\end{bmatrix}$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு:

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4 & 12 & 12 & 4\\ 0 & 4 & 8 & 4\\ 4 & -4 & 8 & 0\end{bmatrix} \text{ என்க}$$

$$\sim\begin{bmatrix}-1 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{matrix}R_1 \to \frac{1}{4}R_1\\ R_2 \to \frac{1}{4}R_2\\ R_3 \to \frac{1}{4}R_3\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}-1 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 1\end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 + R_1$$

$$\sim\begin{bmatrix}-1 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 - 2R_2$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3 என்பதால்,$\rho(A) = 3$.

செய்து பார்க்க:

பின்வரும் அணிகளின் தரம் காண்க.

1. $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 3 & 4\\ 5 & -1 & 7 & 11\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 4 & 1 & -2\\ 3 & 6 & 3 & -7\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}4 & 2 & 1 & 3\\ 6 & 3 & 4 & 7\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & 4 & 6 & -2\\ 3 & 6 & 9 & -3\end{bmatrix}$

✪10. $4x + 5y = 9, 8x + 10y = 18$ என்ற அசமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு:

$$\Delta = \begin{vmatrix}4 & 5\\ 8 & 10\end{vmatrix} = 40 - 40 = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix}9 & 5\\ 18 & 10\end{vmatrix} = 90 - 90 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix}4 & 9\\ 8 & 18\end{vmatrix} = 72 - 72 = 0$$

$\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0$ என்பதாலும்,Δ-இன் குறைந்தது ஒரு கெழு ஆவது பூச்சியமற்று இருப்பதால், தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதாகும். எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும்.

தொகுப்பு ஒரே ஒரு தனிச்சமன்பாட்டிற்கு குறையும். கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பானது $4x + 5y = 9$ ஆகும்.

$y = t, t \in \mathbb{R}$ எனத் தர

$$4x + 5t = 9 \Rightarrow 4x = 9 - 5t \Rightarrow x = \frac{9 - 5t}{4}$$

எனவே தீர்வு கணமானது $(x, y) = \left(\frac{9-5t}{4}, t\right), t \in \mathbb{R}$.

செய்து பார்க்க:

- ❖ **$2x + 3y = 8, 4x + 6y = 16$ என்ற அசமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க.**
- ❖ **$2x - 3y = 7, 4x - 6y = 14$ என்ற அசமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க.**

✪11. $2x + 2y + z = 5, x - y + z = 1, 3x + y + 2z = 4$ என்ற அசமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு:

$$\Delta = \begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix} = 2(-2-1) - 2(2-3) + 1(1+3)$$

$$= -6 + 2 + 4 = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix}5 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 5(-2-1) - 2(2-4) + 1(1+4)$$

$$= -15 + 4 + 5 = -6 \neq 0$$

$\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x \neq 0$ என்பதால். தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது அதாவது இதற்கு தீர்வு கிடையாது.

✪12. $x+y+2z=4, 2x+2y+4z=8, 3x+3y+6z=10$ என்ற அசமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{vmatrix}=0;\Delta_x=\begin{vmatrix}4&1&2\\8&2&4\\10&3&6\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&4&2\\2&8&4\\3&10&6\end{vmatrix}=0;\Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&4\\2&2&8\\3&3&10\end{vmatrix}=0$$

$\Delta=0$ மற்றும் $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ மேலும் Δ-ன் எல்லா 2×2 சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்புகள் பூச்சியமாவதாலும். Δ_x-இன் சிற்றணிக் கோவை $\begin{vmatrix}8&2\\10&3\end{vmatrix}=24-20\neq 0$ என்பதால் தொகுப்பு ஒங்கமைவு அற்றது. எனவே அதற்கு தீர்வு கிடையாது.

செய்து பார்க்க:

- $x+2y+3z=6$; $x+y+z=3$; $2x+3y+4z=10$ என்ற அசமபடித்தான நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க.

✪13. தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதா என சரிபார்த்து. அவ்வாறு ஒருங்கமைவு உடையதாயின் அதனைத் தர முறையில் தீர்க்க.

$x+y+z=7; x+2y+3z=18; y+2z=6$

தீர்வு:

தரப்பட்ட தொகுப்பிற்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\18\\6\end{bmatrix}$$

$$AX=B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$[A,B]=\begin{bmatrix}1&1&1&7\\1&2&3&18\\0&1&2&6\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&1&7\\0&1&2&11\\0&1&2&6\end{bmatrix}\quad R_2\to R_2-R_1$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&1&7\\0&1&2&11\\0&0&0&-5\end{bmatrix}\quad R_3\to R_3-R_2$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது, அது மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகளைப் பெற்றுள்ளதால், $\rho[A,B]=3$.

மேலும், $A\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$ இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் இருப்பதால், $\rho(A)=2$ ஆகும். $\rho[A,B]\neq\rho(A)$

எனவே தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு இல்லாதது என்பதால் தீர்வு காண முடியாது.

செய்து பார்க்க:

தர முறையில் தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதா என சரிபார்க்கவும்.

$x-4y+7z=14; 3x+8y-2z=13;$

$7x-8y+26z=5$

✪14. தீர்

$$x+y+2z=0, 3x+2y+z=0, 2x+y-z=0$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&2\\3&2&1\\2&1&-1\end{vmatrix}$$
$$=1(-2-1)-1(-3-2)+2(3-4)$$
$$=1(-3)-1(-5)+2(1)=-3+5-2=0$$

$\Delta=0$ என்பதால் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும், மேலும் Δ வின்ஒரு 2×2 சிற்றணிக் கோவை

$\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}=2-3=-1\neq 0$ என்பதால் தொகுப்பானது இரண்டு சமன்பாடுகளாகக் குறையும். $z=k, k\in R$ என்க.

$$x+y=-2k$$
$$2x+y=k$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=1-2=-1,$$
$$\Delta_x=\begin{vmatrix}-2k&1\\k&1\end{vmatrix}=-2k-k=-3k,$$
$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&-2k\\2&k\end{vmatrix}=k+4k=5k$$

கிரேமரின் விதிப்படி

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-3k}{-1}=3k, y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{5k}{-1}=5k$$

$(x,y,z)=(3k,-5k,k)$ தீர்வாகும்.

✪15. நேர்மாறுகளுக்குரிய வரிசைமாற்று விதி

பெருக்கலின் நேர்மாறு அணியானது நேர்மாறு அணிகளின் வரிசை மாற்றுப் பெருக்கலுக்குச் சமமாகும்.

நிரூபணம் : A மற்றும் B பூச்சியமற்ற கோவை அணிகள் என்க. $|A|\neq 0$ மற்றும் $|B|\neq 0$ ஆகும். $|AB|=|A||B|$ என நமக்குத் தெரியும்,

$|A|\neq 0, |B|\neq 0\Rightarrow |A||B|\neq 0\Rightarrow |AB|\neq 0$

எனவே. AB-யும் ஒரு பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும்.

$\therefore AB$ நேர்மாறு காணத்தக்கது.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}$$
$$=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$$

இவ்வாறே $(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$ என நிறுவலாம்,

$$\therefore (AB)(B^{-1}A^{-1})=(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$$

AB-இன் நேர்மாறு $B^{-1}A^{-1}$ ஆகும்.

$$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

பிரிவு –இ வினா விடைகள்

1. நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் தீர்க்க :

$x-3y-8z+10=0, 3x+y=4, 2x+5y+6z=13$

தீர்வு : தரப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & -8\\3 & 1 & 0\\2 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\4\\13\end{bmatrix}$$

$$AX = B,$$

இங்கு $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & -8\\3 & 1 & 0\\2 & 5 & 6\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}-10\\4\\13\end{bmatrix}$

$$|A| = 1(6-0)+3(18-0)-8(15-2)$$

$$=1(6)+3(18)-8(13)$$

$$=6+54-104=60-104=-44\neq 0$$

$$[A_{ij}]=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\5 & 6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 0\\2 & 6\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 5\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-3 & -8\\5 & 6\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -8\\2 & 6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -3\\2 & 5\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-3 & -8\\1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -8\\3 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -3\\3 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}+(6-0) & -(18-0) & +(15-2)\\-(-18+40) & +(6+16) & -(5+6)\\+(0+8) & -(0+24) & +(1+9)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & -18 & 13\\-22 & 22 & -11\\8 & -24 & 10\end{bmatrix}$$

$$adj\,A=\begin{bmatrix}6 & -22 & 8\\-18 & 22 & -24\\13 & -11 & 10\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(adj\,A)=\frac{1}{-44}\begin{bmatrix}6 & -22 & 8\\-18 & 22 & -24\\13 & -11 & 10\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{-44}\begin{bmatrix}6 & -22 & 8\\-18 & 22 & -24\\13 & -11 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10\\4\\13\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-44}\begin{bmatrix}-60-88+104\\180+88-312\\-130-44+130\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-44}\begin{bmatrix}-44\\-44\\-44\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\therefore x=1, y=1, z=1}$$

செய்து பார்க்க:

நேர்மாறு அணி காணல் முறையில் தீர்க்க:

- ❖ $2x-y+3z=9, x+y+z=6, x-y+z=2$
- ❖ $x+y+z=9, 2x+5y+7z=52, 2x+y-z=0$
- ❖ $2x-y+z=7, 3x+y-5z=13, x+y+z=5$

2. அணிக்கோவை காணல் முறையில் தீர்க்க :

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=1; \frac{2}{x}+\frac{4}{y}+\frac{1}{z}=5; \frac{3}{x}-\frac{2}{y}-\frac{2}{z}=0$$

தீர்வு :

$$\frac{1}{x}=a, \frac{1}{y}=b\,; \frac{1}{z}=c \text{ என்க.}$$

∴ தரப்பட்ட சமன்பாடுகள்

$a+2b-c=1; 2a+4b+c=5, 3a-2b-2c=0$

என அமையும்.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 4 & 1\\3 & -2 & -2\end{vmatrix}$$

$$=1(-8+2)-2(-4-3)-1(-4-12)$$

$$=-6+14+16=24$$

$$\Delta_a=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\5 & 4 & 1\\0 & -2 & -2\end{vmatrix}$$

$$=1(-8+2)-2(-10-0)-1(-10-0)$$

$$=-6+20+10=24$$

$$\Delta_b=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 5 & 1\\3 & 0 & -2\end{vmatrix}$$

$$=1(-10+0)-1(-4-3)-1(0-15)$$

$$=-10+7+15=12$$

$$\Delta_c=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 4 & 5\\3 & -2 & 0\end{vmatrix}$$

$$=1(0+10)-2(0-15)+1(-4-12)$$

$$=10+30-16=24$$

கிரேமர் விதிப்படி,

$$a=\frac{\Delta_a}{\Delta}=\frac{24}{24}=1\Rightarrow x=1$$

$$b=\frac{\Delta_b}{\Delta}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2$$

$$c=\frac{\Delta_c}{\Delta}=\frac{24}{24}=1\Rightarrow z=1$$

$$\therefore \text{ தீர்வு } (x,y,z) = (1,2,1)$$

செய்து பார்க்க:

அணிக்கோவை அணி காணல் முறையில் தீர்க்க:

- ❖ $x+2y+z=7, 2x-y+2z=4, x+y-2z=-1$

  (Hint: $\Delta=14, \Delta_x=15, \Delta_y=30, \Delta_z=30$)
- ❖ $2x+y+z=5\,; x+y+z=4\,; x-y+2z=1$

  (Hint: $\Delta=3, \Delta_x=3, \Delta_y=6, \Delta_z=3$)
- ❖ $x+y+z=4, x-y+z=2; 2x+y-z=1$

  (Hint: $\Delta=6, \Delta_x=6, \Delta_y=6, \Delta_z=12$)
- ❖ $3x+y-z=2; 2x-y+2z=6; 2x+y-2z=-2$

  (Hint: $\Delta=4, \Delta_x=4, \Delta_y=8, \Delta_z=12$)

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \because R_1, R_2 \text{ விகித சமம்}$$

$\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ மேலும் Δ, $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$-இன் எல்லா 2×2 சிற்றணிக் கோவை மதிப்புகளும் பூச்சியங்கள் ஆனால் Δ ல் குறைந்தது ஒரு
உறுப்பாவது பூச்சியமற்றதாதலால் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும். மேற்கண்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒரு சமன்பாட்டுக்கு குறையும்.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பானது $2x - y + z = 2$ ஆகும்.

$y = s, z = t, s, t \in R$ என்க.

$$2x - s + t = 2 \Rightarrow 2x = 2 + s - t \Rightarrow x = \frac{2 + s - t}{2}$$

$$\therefore \text{ தீர்வானது } (x, y, z) = \left(\frac{2 + s - t}{2}, s, t\right), s, t \in R$$

செய்து பார்க்க:

அணிக்கோவை அணி காணல் முறையில் தீர்க்க:

- $x + y + 2z = 4, 2x + 2y + 4z = 8, 3x + 3y + 6z = 12$
- $x + 2y + 3z = 6$; $2x + 4y + 6z = 12$; $3x + 6y + 9z = 18$

5. தர முறையில் தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைந்ததா என சரிபார்த்து. அவ்வாறு ஒருங்கமைந்ததாயின் அதனைத் தீர்க்க :

$4x + 3y + 6z = 25, x + 5y + 7z = 13, 2x + 9y + z = 1$

தீர்வு :

தரப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$[AB] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 & 25 \\ 1 & 5 & 7 & 13 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 4 & 3 & 6 & 25 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & -17 & -22 & -27 \\ 0 & -1 & -13 & -25 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 4R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & -17 & -22 & -27 \\ 0 & 0 & -199 & -398 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 17R_3 - R_2$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது, அது மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகளைப் பெற்றுள்ளதால். $\rho\,[A, B] = 3$ ஆகும்.

$$\text{மேலும்} A \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & -17 & -22 \\ 0 & 0 & -199 \end{bmatrix}$$

இதில் மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகள் இருப்பதால்,

$$\rho\,(A) = 3$$

$\rho\,(A) = \rho\,[A, B] = 3 =$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை. எனவே, இது ஒருங்கமைச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பாகும். மேலும் இதற்கு ஒரே ஒரு தீர்வுதான் காண முடியும்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & -17 & -22 \\ 0 & 0 & -199 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -27 \\ -398 \end{bmatrix}$$

$$x + 5y + 7z = 13$$

$$-17y - 22\,z = -27$$

$$-199z = -398 \Rightarrow \boxed{z = 2}$$

$$-17y - 22(2) = -27 \Rightarrow -17y = -27 + 44 = 17$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -1}$$

$$x + 5(-1) + 7(2) = 13 \Rightarrow x = 13 + 5 - 14 = 4$$

$$\boldsymbol{x = 4, y = -1, z = 2}$$

செய்து பார்க்க:

தர முறையில் தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைந்ததா என சரிபார்த்து. அவ்வாறு ஒருங்கமைந்ததாயின் அதனைத் தீர்க்க :

$2x + 5y + 7z = 52, x + y + z = 9, 2x + y - z = 0$

6. தர முறையில் தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைந்ததா என சரிபார்த்து. அவ்வாறு ஒருங்கமைந்ததாயின் அதனைத் தீர்க்க :

$x - 3y - 8z = -10; 3x + y - 4z = 0;$
$2x + 5y + 6z - 13 = 0$

தீர்வு :

தரப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$[AB] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & -10 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & -10 \\ 0 & 10 & 20 & 30 \\ 0 & 11 & 22 & 33 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to \frac{1}{10} R_2 \\ R_3 \to \frac{1}{11} R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 - R_2$$

கடைசி சமான அணியில் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளதால், $\rho\,[A, B] = 2$ ஆகும்.

$$\text{மேலும் } A \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இதில் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளதால், $\rho\,(A) = 2$.

$\rho\,(A) = \rho\,[A, B] = 2 <$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை. எனவே, தரப்பட்ட தொகுப்பிற்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்.

இது ஒருங்கமைச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பாகும்.

தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது. பின்வரும் அணிச்சமன்பாட்டுக்குச் சமானமானதாகும்.

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & -8\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\3\\0\end{bmatrix}$$

$x-3y-8z=-10 \cdots\cdots (1)$

$y+2z=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$z=k\in R$ என்க.

$(1)\Rightarrow y=3-2z=3-2k$

$(2)\Rightarrow x=-10+3y+8z=-10+3(3-2k)+8k$
$=-1+2k$

தீர்வானது $\boldsymbol{x=2k-1, y=3-2k, z=k, k\in R}$

செய்து பார்க்க:

தர முறையில் தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைந்ததா என சரிபார்த்து. அவ்வாறு ஒருங்கமைந்ததாயின் அதனைத் தீர்க்க :

$x+y+z=6, x+2y+3z=14, x+4y+7z=30$

7. தர முறையில் தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைந்ததா என சரிபார்த்து. அவ்வாறு ஒருங்கமைந்ததாயின் அதனைத் தீர்க்க :
$\boldsymbol{x+y-z=1;\ 2x+2y-2z=2;}$
$\boldsymbol{-3x-3y+3z=-3}$

தீர்வு :

தரப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 2 & -2\\-3 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$$

$AX=B$

$$[AB]=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\2 & 2 & -2 & 2\\-3 & -3 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\R_2\longrightarrow R_2-2R_1\\R_3\longrightarrow R_3+3R_1\end{matrix}$$

கடைசி சமான அணியில் ஒரே ஒரு பூச்சியமற்ற நிரைதான் உள்ளது. $\rho[A,B]=1$ ஆகும்.

மேலும் $A\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

இதில் ஒரே ஒரு பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளதால்,

$\rho(A)=1$

$\rho(A)=\rho[A,B]=1<$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை. எனவே, தரப்பட்ட தொகுப்பிற்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும். இது ஒருங்கமைச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பாகும். தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது. பின்வரும் அணிச்சமன்பாட்டுக்குச் சமானமானதாகும்.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$x+y-z=1 \cdots\cdots (1)$

$y=k_1, z=k_2, k_1,k_2\in R$ என்க.

$(1)\Rightarrow x=1-y+z=1-k_1+k_2$

தீர்வானது

$\boxed{\boldsymbol{x=1-k_1+k_2, y=k_1, z=k_2, k_1,k_2\in R}}$

செய்து பார்க்க:

தர முறையில் தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைந்ததா என சரிபார்த்து. அவ்வாறு ஒருங்கமைந்ததாயின் அதனைத் தீர்க்க :

$x-y+z=5, -x+y-z=-5, 2x-2y+2z=10$

8. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவுத் தன்மையை ஆராய்க.
$\boldsymbol{2x-3y+7z=5, 3x+y-3z=13, 2x+19y-47z=32}$

தீர்வு :

தரப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 7\\3 & 1 & -3\\2 & 19 & -47\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\13\\32\end{bmatrix}$$

$AX=B$

$$[AB]=\begin{bmatrix}2 & -3 & 7 & 5\\3 & 1 & -3 & 13\\2 & 19 & -47 & 32\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2}\\3 & 1 & -3 & 13\\2 & 19 & -47 & 32\end{bmatrix}\ R_1\to\frac{1}{2}R1$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2}\\0 & \frac{11}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{11}{2}\\0 & 22 & -54 & 27\end{bmatrix}\begin{matrix}\\R_2\to R_2-3R_1\\R_3\to R_3-2R_1\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2}\\0 & \frac{11}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{11}{2}\\0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\ R_3\to R_3-4R_2$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது, அது மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகளைப் பெற்றுள்ளதால். $\rho[A,B]=3$ ஆகும். மேலும்

$$A\sim\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2}\\0 & \frac{11}{2} & -\frac{27}{2}\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

இதில் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளதால்,

$\rho(A)=2$

$\rho(A)\neq\rho[A,B]$

எனவே, தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு இல்லாதது என்பதால் தீர்வு காண முடியாது.

9. λ-இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வுகளை ஆராய்க.
$\boldsymbol{x+y+z=2, 2x+y-2z=2,}$

$$\boldsymbol{\lambda x + y + 4z = 2}$$

தீர்வு :

தரப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \lambda & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$[AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 4-\lambda & 2-2\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - \lambda R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & -\lambda & -\lambda & -2\lambda \end{bmatrix} R_3 \to R_3 + R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3\lambda & 0 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 - \lambda R_2$$

நிலை (i) : $\lambda = 0 \Rightarrow \rho(A) = 2; \rho[A,B] = 2$

$\rho(A) = \rho[A,B] = 2 < 3$ (மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.)

∴ தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உள்ளது. ஆனால் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

நிலை (ii) : $\lambda \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 3; \rho[A,B] = 3$

$\rho(A) = \rho[A,B] = 3$ (=மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.)

∴தரப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உள்ளது. எனவே ஒரே ஒரு தீர்வினை பெற்றிருக்கும்.

10. k-இன் எம்மதிப்புகளுக்கு பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு $kx + y + z = 1, x + ky + z = 1, x + y + kz = 1$ (i) ஒரே ஒரு தீர்வு (ii) ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தீர்வு (iii) தீர்வு இல்லாமை பெறும் .

தீர்வு :

தரப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$[AB] = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - kR_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1-k \end{bmatrix} R_3 \to R_3 + R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & (2+k)(1-k) & 1-k \end{bmatrix}$$

நிலை (i) : $k = 1 \Rightarrow \rho(A) = 1; \rho[A,B] = 1$

$\rho(A) = \rho[A,B] = 1 < 3$ (மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.)

∴ தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உள்ளது. ஆனால் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

நிலை (ii) : $k = -2 \Rightarrow \rho(A) = 2; \rho[A,B] = 3$

$$\rho(A) \neq \rho[A,B]$$

எனவே தரப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு இல்லாதது, எனவே தீர்வு கிடைக்காது.

நிலை (iii) : $k \neq -2$ மற்றும் $k \neq 1$

$$\Rightarrow \rho(A) = 3; \rho[A,B] = 3$$

$\rho(A) = \rho[A,B] = 3$ (=மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.)

∴தரப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உள்ளது. எனவே ஒரே ஒரு தீர்வினை பெற்றிருக்கும்.

செய்து பார்க்க:

- **எடுத்துக்காட்டு 1.26 :** λ, μ-இன் எம்மதிப்புகளுக்கு $x + y + z = 6, x + 2y + 3z = 10, x + 2y + \lambda z = \mu$ என்ற சமன்பாடுகள் (i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிராது (ii) ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும் (iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.
- **எடுத்துக்காட்டு 1.28 :** μ -இன் எம்மதிப்பிற்கு $x + y + 3z = 0, 4x + 3y + \mu z = 0, 2x + y + 2z = 0$ என்ற தொகுப்பிற்கு (i) வெளிப்படைத் தீர்வு (ii) வெளிப்படையற்ற தீர்வு கிடைக்கும்.
- **பயிற்சி 1.1 ல் 3, 6, 7, 9**
- **எடுத்துக்காட்டுகள்: 1.14, 1.21, 1.27**

வெக்டர் இயற்கணிதம்

பிரிவு –அ வினா விடைகள்

(வினா எண்	வினா	விடை
1	$x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+1=0$ என்ற கோளத்தின் மையம் மற்றும் ஆரம்	$(3,-4,5),7$
2	$\vec{r}=(-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})+t(-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ மற்றும் $\vec{r}=(2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k})+s(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி	$(1,1,2)$
3	$\vec{u}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$, எனில்	$\vec{u}=\vec{0}$
4	$\frac{x-3}{1}=\frac{y+3}{5}=\frac{2z-5}{3}$ க்கு இணையாகவும் $(1,3,5)$ புள்ளி வழியாகவும் செல்லக்கூடிய கோட்டின்வெக்டர் சமன்பாடு	$\vec{r}=(\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k})+t\left(\vec{i}+5\vec{j}+\frac{3}{2}\vec{k}\right)$
5	$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}, \lvert\vec{a}\rvert=3, \lvert\vec{b}\rvert=4, \lvert\vec{c}\rvert=5$, எனில்$\vec{a}$ க்கும் $\vec{b}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணம்	$\frac{\pi}{2}$
6	$(2,1,-1)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் தளங்கள $\vec{r}\cdot(\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})=0$; $\vec{r}\cdot(\vec{j}+2\vec{k})=0$ வெட்டிக் கொள்ளும் கோட்டை உள்ளடக்கியதுமான தளத்தின் சமன்பாடு	$x+9y+11z=0$
7	$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன a,b,c ஆகியவற்றை மட்டுக்களாகக் கொண்டு வலக்கை அமைப்பில் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான வெக்டர்கள் எனில் $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ இன் மதிப்பு	abc
8	$\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{-3}$ மற்றும் $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}$ என்ற இணை கோடுகளுக்கிடையே உள்ள மிக குறைந்த தொலைவு	3
9	$\vec{a}$ ஒரு பூச்சியமற்ற வெக்டராகவும் m ஒரு பூச்சியமற்ற திசையிலியாகவும் இருப்பின் $m\vec{a}$ ஆனது ஓரலகு வெக்டர் எனில்,	$a=\frac{1}{\lvert m\rvert}$
10	$3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ என்ற வெக்டரை ஒரு மூலை விட்டமாகவும் $\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ ஐ ஒரு பக்கமாகவும் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு	$3\sqrt{30}$
11	$\frac{x-6}{-6}=\frac{y+4}{4}=\frac{z-4}{-8}$ மற்றும் $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+3}{-2}$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி	$(0,0,-4)$
12	$[\vec{i}+\vec{j}, \vec{j}+\vec{k}, \vec{k}+\vec{i}]$ இன் மதிப்பு	2
13	$(2,10,1)$ என்ற புள்ளிக்கும $\vec{r}\cdot(3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k})=2\sqrt{26}$ என்ற தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட மிகக் குறைந்த தூரம்	2
14	$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{x}\times\vec{y}$, எனில்	$\vec{x}=\vec{0}$ அல்லது $\vec{y}=\vec{0}$ அல்லது $\vec{x}$–ம் $\vec{y}$ ம் இணையாகும்
15	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ மற்றும் $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{5}$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே உள்ள மிகக் குறைந்த தொலைவு	$\frac{1}{\sqrt{6}}$

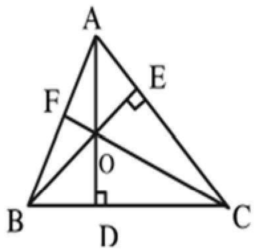
(வினா எண்	வினா	விடை
16	$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ இரண்டு ஒரலகு வெக்டர் மற்றும் θ என்பது அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\vec{a}+\vec{b}$ ஆனது ஒரலகு வெக்டராயின்	$\theta = \frac{2\pi}{3}$
17	$2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$, $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் செங்குத்து வெக்டர்களாயின	$a = 4,\quad b = 4,\quad c = -5$
18	$\vec{r} = s\vec{i}+t\vec{j}$ என்ற சமன்பாடு குறிப்பது	xoy தளம்
19	$\vec{p},\vec{q}$ மற்றும் $\vec{p}+\vec{q}$ ஆகியவை எண்ணளவு λ கொண்ட வெக்டர்களாயின் $\lvert\vec{p}-\vec{q}\rvert$ ஆனது	$\sqrt{3}\,\lambda$
20	$\overrightarrow{PR} = 2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ $\overrightarrow{QS} = -\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ எனில், நாற்கரம் $PQRS$ இன் பரப்பு	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$
21	$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ மற்றும் $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{2}$ ஆகிய இருகோடுகளும்	ஒரு தளம் அமையாதவை
22	$[\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a}] = 8$ எனில் $[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]$ இன் மதிப்பு	4
23	$\vec{i}+a\vec{j}-\vec{k}$ எனும் விசை $\vec{i}+\vec{j}$ எனும் புள்ளிவழியேச் செயல்படுகிறது $\vec{j}+\vec{k}$ எனும் புள்ளியைப் பொறுத்து அதன் திருப்புத் திறனின் அளவு $\sqrt{8}$ எனில் a இன் மதிப்பு	2
24	$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ என்பன ஒரு தளம் அமையா வெக்டர்கள் மேலும் $[\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}] = [\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a}]$ எனில் $[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]$ இன் மதிப்பு	2
25	ஒரு கோடு x மற்றும் y அச்சுகளுடன் மிகை திசையில் $45^0, 60^0$ கோணங்களை ஏற்படுத்துகிறது எனில் z அச்சுடன் அது உண்டாக்கும் கோணம்	60^0
26	$\vec{r} = (\vec{i}-\vec{k}) + t(3\vec{i}+2\vec{j}+7\vec{k})$ என்ற கோடும் $\vec{r}\cdot(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = 8$ என்ற தளமும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி	$(-8,-6,-22)$
27	$[\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}] = 64$ எனில் $[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]$ இன் மதிப்பு	8
28	$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$ என்பது	$\vec{a},\ \vec{b}$ ஐ கொண்ட தளமும் $\vec{c},\ \vec{d}$ ஐ கொண்ட தளமும் வெட்டிக் கொள்ளும் கோட்டிற்கு இணை
29	$\vec{F} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ என்ற விசை ஒரு துகளை $A(3,3,3)$ எனும் நிலையிலிருந்து $B(4,4,4)$எனும் நிலைக்கு நகர்த்தினால் அவ்விசை செய்யும் வேலையளவு	3 அலகுகள்
30	$\vec{a} = \vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ எனில் $\vec{a}$ க்கும் $\vec{b}$ க்கும் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு ஒரலகு வெக்டர்	$\frac{\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{3}}$
31	$\vec{a}$ க்கும் $\vec{b}$ க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் 120^0 மேலும் அவற்றின் எண்ணளவுகள் முறையே 2 , $\sqrt{3}$ எனில் $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ஆனது	$-\sqrt{3}$
32	$\vec{b}$ இன் மீது $\vec{a}$ இன் வீழல் மற்றும் $\vec{a}$ இன்மீது $\vec{b}$ இன் வீழலும் சமமாயின் $\vec{a}+\vec{b}$ மற்றும் $\vec{a}-\vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம்	$\frac{\pi}{2}$

(வினா எண்	வினா	விடை
33	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்ற ஒரு தளமற்ற வெக்டர்களுக்கு $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ எனில்	$\vec{c}$ ஆனது $\vec{a}$ –க்கு இணை
34	$\overrightarrow{OQ}$ என்ற அலகு வெக்டர் மீதான $\overrightarrow{OP}$ இன் வீழலானது $OPRQ$ என்ற இணைகரத்தின் பரப்பை போன்று மும்மடங்காயின் $\angle POQ$ ஆனது	$\tan^{-1}\frac{1}{3}$
35	$\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a} - \vec{b}\rvert$ எனில்	$\vec{a}$ - ம் $\vec{b}$ - ம் செங்குத்தாகும்

பிரிவு –இ வினா விடைகள்

✪1. ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் என்பதனை வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு: முக்கோணத்தின் உச்சிகள் A, B, C என்க. குத்துக்கோடுகள் AD, BE வரைக. அவைகள் வெட்டும் புள்ளி O என்க. CO வைச் சேர்த்து நீட்ட அது AB யை F இல் சந்திக்கிறது என்க. குத்துக்கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் என்பதனை



நிறுவ, $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{AB}$ என நிறுவினால் போதும்.

O வைப் பொறுத்து A, B, C களின் நிலை வெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்க.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

$$AD \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$\text{i.e., } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0} \quad (1)$$

$$BE \perp CA \Rightarrow \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CA}$$

$$\text{i.e., } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) = 0$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$$

$$\boxed{\vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0} \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) யைக் கூட்ட

$$\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

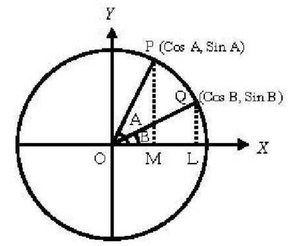
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

$$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{OC}$$

எனவே மூன்று குத்துக்கோடுகளும் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் கோடுகளாகும்.

✪2. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ என்பதனை வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு: O யை மையமாகவும் ஓரலகு ஆரமும் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக. $\angle XOP = A, \angle XOQ = B$ என்றவாறு அவ்வட்டத்தின் பரிதியில் P, Q என்ற இருபுள்ளிகளை குறிக்க.



$$\therefore \angle POQ = \angle POX - \angle QOX$$

$$= A - B$$

P, Q- ன் ஆயத்தொலைகள் முறையே $(\cos A, \sin A)$ மற்றும் $(\cos B, \sin B)$.

x, y – அச்சுத் திசைகளில் செயல்படும் அலகு வெக்டர்கள் $\vec{i}$ மற்றும் $\vec{j}$ என்க.

$$\overrightarrow{OP} = \cos A\,\vec{i} + \sin A\,\vec{j}, \overrightarrow{OQ} = \cos B\,\vec{i} + \sin B\,\vec{j}$$

புள்ளிப்பெருக்கலின் வரையறைப் படி

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos(A - B)$$

$$= (1)(1)\cos(A - B) = \cos(A - B) \quad (1)$$

புள்ளிப்பெருக்கலின் மதிப்பின் படி

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (\cos A\,\vec{i} + \sin A\,\vec{j}) \cdot (\cos B\,\vec{i} + \sin B\,\vec{j})$$

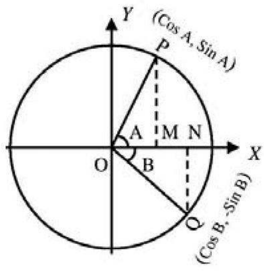
$$= \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\boxed{\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

✪3. $\cos(A+B) = \cos A\ \cos B - \sin A \sin B$ என்பதனை வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு: O யை மையமாகவும் ஓரலகு ஆரமும் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக. $\angle xOP = A, \angle xOQ = B$ என்றவாறு அவ்வட்டத்தின் பரிதியில் P, Q என்ற இருபுள்ளிகளை குறிக்க.



$\therefore \angle POQ = \angle POx + \angle QOx = A + B$.

P, Q- ன் ஆயத்தொலைகள் முறையே $(\cos A, \sin A)$ மற்றும் $(\cos B, -\sin B)$.$x, y -$ அச்சுத் திசைகளில் செயல்படும் அலகு வெக்டர்கள் $\vec{\imath}$ மற்றும் $\vec{\jmath}$ என்க.

$\overrightarrow{OP} = \cos A\,\vec{\imath} + \sin A\,\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OQ} = \cos B\,\vec{\imath} - \sin B\,\vec{\jmath}$

புள்ளிப்பெருக்கலின் வரையறைப் படி

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}| \cos(A+B)$$

$$= (1)(1)\cos(A+B) = \cos(A+B) \quad (1)$$

புள்ளிப்பெருக்கலின் மதிப்பின் படி

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (\cos A\,\vec{\imath} + \sin A\,\vec{\jmath}) \cdot (\cos B\,\vec{\imath} - \sin B\,\vec{\jmath})$$

$$= (\cos A)(\cos B) + (\sin A)(-\sin B)$$

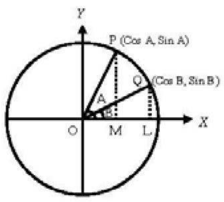
$$= \cos A\ \cos B - \sin A \sin B \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\boxed{\cos(A+B) = \cos A\ \cos B - \sin A \sin B}$$

✪4. $\sin(A-B) = \sin A\ \cos B - \cos A \sin B$ என்பதனை வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு: O யை மையமாகவும் ஓரலகு ஆரமும் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக.



$\angle XOP = A, \angle XOQ = B$ என்றவாறு அவ்வட்டத்தின் பரிதியில் P, Q என்ற இருபுள்ளிகளை குறிக்க.

$\therefore \angle POQ = \angle POX + \angle QOX = A - B$.

P, Q- ன் ஆயத்தொலைகள் முறையே $(\cos A, \sin A)$ மற்றும் $(\cos B, \sin B)$.$x, y -$ அச்சுத் திசைகளில் செயல்படும் அலகு வெக்டர்கள் $\vec{\imath}$ மற்றும் $\vec{\jmath}$ என்க.

$\overrightarrow{OP} = \cos A\,\vec{\imath} + \sin A\,\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OQ} = \cos B\,\vec{\imath} + \sin B\,\vec{\jmath}$

குறுக்குப்பெருக்கலின் வரையறைப் படி

$$\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{OP}| \sin(A-B)\,\vec{k}$$

$$= (1)(1)\sin(A-B)\,\vec{k} = \sin(A-B)\,\vec{k} \quad (1)$$

குறுக்குப்பெருக்கலின் மதிப்பின் படி

$$\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos B & \sin B & 0 \\ \cos A & \sin A & 0 \end{vmatrix}$$

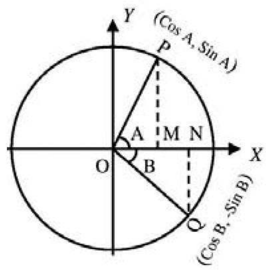
$$= \vec{k}(\sin A \cos B - \cos A \sin B) \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\boxed{\sin(A-B) = \sin A\ \cos B - \cos A \sin B}$$

✪5. $\sin(A+B) = \sin A\ \cos B + \cos A \sin B$ என்பதனை வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு: O யை மையமாகவும் ஓரலகு ஆரமும் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக. $\angle xOP = A, \angle xOQ = B$ என்றவாறு அவ்வட்டத்தின் பரிதியில் P, Q என்ற இருபுள்ளிகளை குறிக்க.



$\therefore \angle POQ = \angle POx - \angle QOx$
$= A + B$

.P, Q- ன் ஆயத்தொலைகள் முறையே $(\cos A, \sin A)$ மற்றும் $(\cos B, -\sin B)$.

$x, y -$ அச்சுத் திசைகளில் செயல்படும் அலகு வெக்டர்கள் $\vec{\imath}$ மற்றும் $\vec{\jmath}$ என்க.

$\overrightarrow{OP} = \cos A\,\vec{\imath} + \sin A\,\vec{\jmath}$,$\overrightarrow{OQ} = \cos B\,\vec{\imath} - \sin B\,\vec{\jmath}$

குறுக்குப்பெருக்கலின் வரையறைப் படி

$$\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OQ}||\overrightarrow{OP}| \sin(A+B)\,\vec{k}$$

$$= (1)(1)\sin(A+B)\,\vec{k}$$

$$= \sin(A+B)\,\vec{k} \quad (1)$$

குறுக்குப்பெருக்கலின் மதிப்பின் படி

$$\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos B & -\sin B & 0 \\ \cos A & \sin A & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{k}(\sin A \cos B + \cos A \sin B) \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$\boxed{\sin(A+B) = \sin A\ \cos B - \cos A \sin B}$$

✪6. $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}, \vec{b} = -2\vec{\imath} + 5\vec{k}, \vec{c} = \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ எனில் $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ என சரிபார்க்க.

தீர்வு:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$